Klausur

Datum: 29.07.2009 Dauer: 1.5 Stunden

Prüfer: Prof. Dr. M. Morgenstern

Elementare Quantenmechnik für Materialwissenschaftler

---

1 Verständnisfragen

1 Punkt pro Frage

1. Nennen Sie drei skalare Größen, die beim Stoß zwischen einem Photon und einem Neutron erhalten bleiben !
2. Geben Sie die allgemeine Form einer stationären Wahrscheinlichkeitsamplitude $\Psi(\underline{x}, t)$ an !
3. Warum ändert sich das Interferenzmuster auf dem Schirm hinter einem Doppelspaltexperiment, wenn man misst, ob die Objekte durch den linken oder durch den rechten Spalt gekommen sind ?
4. Wie berechnet man den Mittelwert der kinetischen Energie E_{kin} für einen stationären Zustand ?
5. Was versteht man unter Vollständigkeit der stationären Lösungen einer Schrödingergleichung ?
6. Welche Bedingungen müssen Wahrscheinlichkeitsamplituden am Rand eines Potentialkastens erfüllen ?
7. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsamplitude des stationären Zustandes mit fünftniedrigster Energie $\Psi_5(x)$ eines eindimensionalen Potentialkastens mit unendlich hohen Wänden !
8. Was ist ein Aufsteigeoperator ?
9. Wieviele Knoten in radialer Richtung hat der 5d-Zustand ($n = 5$, $l = 2$, $m = 1$) eines Elektrons im H-Atom ?

2 Quiz

1 Punkt pro Quizfrage (mehrere Antworten zu einer Frage können richtig sein). Bei Ankreuzen auf dem Aufgabenblatt, bitte Aufgabenblatt mit Namen versehen abgeben.

1. Was gilt für die Wellenlänge eines freien Elektrons ?

   (a) Die Wellenlänge ist für jedes einzelne Elektron eindeutig messbar.
   (b) Die Wellenlänge hängt nur von der Geschwindigkeit des Elektrons ab.
   (c) Die Wellenlänge ändert sich, wenn das Elektron mit einem Photon wechselwirkt.
   (d) Die Wellenlänge ändert sich, wenn das Elektron mit einem anderen Elektron stößt.

2. Was gilt für die stationären Lösungen einer Schrödingergleichung ?

   (a) Es gibt einen vollständigen Satz stationärer Lösungen.
   (b) Die Summe von zwei stationären Lösungen ist immer nicht-stationär.
   (c) Die Summe von zwei stationären Lösungen ist immer stationär.
   (d) Zwei Lösungen zu verschiedener Energie sind orthogonal.

3. Wie berechnet man den mittleren Impuls $\underline{\overline{p}}$ eines stationären Zustandes $\Psi(\underline{x})$?

$$\underline{\overline{p}} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{\star}(\underline{x}) \cdot \hbar k \cdot \Psi(\underline{x})\, dx \tag{1}$$

$$\underline{\overline{p}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{\star}(\underline{x}) \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \left(\frac{d}{dx} + \frac{d}{dy} + \frac{d}{dz}\right) \cdot \Psi(\underline{x})\, dx\, dy\, dz \tag{2}$$

$$\underline{\overline{p}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{\star}(\underline{x}) \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right) \cdot \Psi(\underline{x})\, dx\, dy\, dz \tag{3}$$

4. Was gilt für die Wahrscheinlichkeitsamplitude eines Elektrons $\Psi(x)$ in einem Bereich, in dem die Gesamtenergie des Elektrons kleiner als die räumlich konstante, potentielle Energie ist ?

   (a) Der Realanteil von $\Psi(x)$ ist Null.
   (b) Real- und Imaginäranteil von $\Psi(x)$ sind Null.
   (c) $\Psi(x)$ ist eine Exponentialfunktion.
   (d) $\Psi(x)$ ist eine stehende Welle.

5. Mit Hilfe von Matrizenrechung lassen sich Schrödingergleichungen lösen. Was gilt für dieses Verfahren ?

   (a) Jede stationäre Schrödingergleichung lässt sich prinzipiell als Matrixgleichung darstellen.
   (b) Die zugehörigen Matrixelemente $< \Psi_n|H|\Psi_m >$ lassen sich prinzipiell mit Hilfe ebener Wellen vollständig berechnen.
   (c) Die Matrix hat nur reelle Matrixelemente.
   (d) Die Eigenwerte der Matrix sind die Energien der stationären Zustände der Schrödingergleichung.

6. Welche der folgenden Aussagen treffen für die Wahrscheinlichkeitsamplituden $\Psi(x, y, z)$ von Elektronen in einem konstanten $\underline{B}$-Feld zu?

   (a) Die Wahrscheinlichkeitsamplitude wird in der Richtung parallel zum $\underline{B}$-Feld vom $\underline{B}$-Feld nicht beeinflusst.
   (b) Der Abstand zwischen den Energien der stationären Zustände nimmt mit dem $\underline{B}$-Feld zu.
   (c) Es gibt zur niedrigst möglichen Energie mehrere orthogonale Wahrscheinlichkeitsamplituden.
   (d) Die mittlere Ausdehnung $\overline{r}$ der Wahrscheinlichkeitsamplituden senkrecht zum $\underline{B}$-Feld nimmt mit dem $\underline{B}$-Feld zu.

7. Wieviele energetisch entartete Zustände hat das H-Atom für $n = 7$ (Elektronenspin berücksichtigen) ?

   (a) 14
   (b) 28
   (c) 98
   (d) 7!

8. Eine Schrödingergleichung beinhaltet ein elektrostatisches Potential $V(r)$, das nur vom Abstand zu einem Zentrum abhängt (radialsymmetrisch). Welche Aussage ist richtig ?

   (a) Die Lösung der Schrödingergleichung separiert in Kugelkoordinaten, d.h. die stationären Lösungen haben die Form: $\Psi(r) \cdot \Phi(\Theta) \cdot \Pi(\varphi)$.
   (b) Die Energie der stationären Zustände hängt nur vom Radialanteil $\Psi(r)$ ab.
   (c) Die stationären Lösungen sind Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators.
   (d) Die stationären Lösungen sind Eigenfunktionen des Rotationsenergieoperators.

9. Beim Übergang von Vanadium ($4s^2 3d^3$) zum Chrom ($4s^1 3d^5$) wird ein Elektron aus der $4s$-Schale in die $3d$-Schale umgelagert. Warum ?

   (a) Elektronen in der 3d-Schale stoßen sich weniger stark ab als in der $4s$-Schale.
   (b) In die $4s$-Schale von Chrom passt nur ein Elektron.
   (c) Die höhere Kernladungszahl des Chrom führt zu einer stärkeren Anziehung der äußeren Elektronen, die in der 3d-Schale weniger stark abgeschirmt ist.
   (d) 5 Elektronen stellen für die $3d$-Schale die energetisch günstigste Konfiguration dar.

3 Aufgaben

5 Punkte pro Aufgabe, alle Formeln aus dem Skript dürfen verwendet werden. (*) mittelschwer, (**) schwer. Energien bitte in eV oder meV angeben.

1. In einem Würfel mit gleichen Kantenlängen $L = 10$ nm in alle drei Richtungen und unendlich hohen Potentialwänden sei ein Elektron eingesperrt.

   (a) Geben Sie die 4 niedrigsten Energien möglicher stationärer Zustände in meV an. (Potentialboden E:= 0 meV). (*)
   (b) Geben Sie die notwendige Frequenz f des Lichtes an, um das Elektron vom niedrigsten in den viertniedrigsten Zustand zu bringen ! (*)

2. Ein freies Elektron sei in einem Zustand
   $\Psi(x,t) = A\cdot(e^{i\cdot(k_1\cdot x-\omega_1\cdot t)}+e^{i\cdot(k_2\cdot x-\omega_2\cdot t)})$ mit $k_1 = 10/\text{nm}$ und $k_2 = 20/\text{nm}$.

   (a) Geben Sie die mittlere Energie des Elektrons an ! (*)
   (b) Welche Wellenlänge λ hat die elektromagnetische Welle, die von dem Elektron abgestrahlt wird ? (*)

3. Ein $^{28}_{14}$Si-Atom sei soweit ionisiert, dass nur noch ein Elektron übrig ist, welches sich im 4d-Zustand ($n = 4$, $l = 2$, $m = 0$) befindet.

   (a) Geben Sie die Rotationsenergie des Elektrons an !
   (Nehmen Sie an: $\overline{r^2} \simeq \overline{r}^2$) (**)
   (b) Welche Energie braucht man noch, um den $^{28}_{14}$Si-Atomkern vollständig zu ionisieren ? (*)

Konstanten

Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6.625 \cdot 10^{-34}$ Js, $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$ Js
Lichtgeschwindigkeit: $v_p = 3 \cdot 10^8$ m/s
Elementarladung: $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronenmasse $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg
Lichtgeschwindigkeit: $v_p = 3 \cdot 10^8$ m/s