Klausur zur Physik der kondensierten Materie

Do, 21.07.2011

Verständnisfragen

2 Punkte pro Aufgabe

1. Von wievielen skalaren Variablen hängt die zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsamplitude eines dreidimensionalen Systems mit 3 Elektronen ab? Geben Sie die Bedeutung jeder Variablen an!
2. Wie ändert sich die Fermienergie eines dreidimensionalen Systems freier Elektronen als Funktion der Temperatur? Begründen Sie!
3. Warum ist die Wärmekapazität der Phononen bei Raumtemperatur für alle Festkörper größer als die Wärmekapazität der Elektronen?
4. Wodurch kommt der so genannte Fermi-Druck der Elektronen zustande?
5. Aus welchen beiden Funktionstypen setzt sich eine Blochwelle zusammen?
6. Welche Größe bestimmt den kleinstmöglichen Abstand von elektronischen Zuständen im $\underline{k}$-Raum?
7. Erläutern Sie, warum die elektronische Zustandsdichte dort besonders groß ist, wo Maxima oder Minima der $E(\underline{k})$-Dispersion zu finden sind!
8. Wie kann man den durch elektrische Spannung hervorgerufenen Strom für die dreidimensionale Bandstruktur $E(\underline{k})$ eines kristallinen Festkörpers in Worten beschreiben? Hinweis: Benutzen Sie das Relaxationsmodell.
9. Welche zwei Parameter eines Halbleiters sind für die Bindungsenergie von Donatorelektronen entscheidend?
10. Warum ist die Leitfähigkeit von Metallen nicht durch externe Gate-Elektroden steuerbar?
11. Welche Wechselwirkung zwischen Elektronen ist für den Ferromagnetismus verantwortlich?
12. Welche beiden Eigenschaften charakterisieren einen Supraleiter?

Aufgaben

Aufgaben sind entsprechend Schwierigkeitsgrad markiert:
(*) leicht, (**) mittel , (***) schwer

1. *Zweidimensionales Elektronengas* (8 Punkte)

   Ein zweidimensionales Elektronensystem (Quadrat mit Kantenlänge 2 mm) habe die Dispersionsrelation

   $$E(k) = E_0 \cdot (1 + \cos(\alpha k)) \quad \text{für} \quad \alpha k < 2\pi \quad \text{und} \tag{1}$$
   $$E(k) = 2E_0 \quad \text{für} \quad \alpha k \geq 2\pi \tag{2}$$

   mit $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$ und der Fermi-Energie $E_\text{F} = E_0 = 2\,\text{eV}$ bei $T = 0\,\text{K}$. Die Gitterkonstante des quadratischen, atomaren Gitters sei $a = 0.2$ nm.

   (a) Berechnen Sie die Fermi-Wellenvektoren k_F mit $E(k_F) = E_F$ bei $T = 0\,\text{K}$. (*)

   (b) Bestimmen Sie die Flächen-Ladungsträgerdichte. (**)

   (c) Berechnen Sie die Zustandsdichte $Z(E)$ bei $E = E_F$ über $dN = \ldots dk$. (***)

   Hinweise:

   - zu (b): Beachten Sie, dass es mehrere Fermilinien gibt.
   - zu (c): $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $-1 < x < 1$ und $0 < \arccos x < \pi$.

2. *Effektive Masse* (8 Punkte)

   Ein zweidimensionales Elektronensystem der Ladungsträgerdichte $n = 10^{16}\,\text{m}^{-2}$ werde beschrieben durch die Dispersionsrelation $E(k) = \alpha k^4$ mit $\alpha = 1{,}42 \cdot 10^{-52}\,\text{J} \cdot \text{m}^4$. Auf ein Wellenpaket mit dem Wellenvektor $\underline{k} = (k_x, k_y)$ wirke ein elektrisches Feld $\underline{E} = (E, 0)$.

   (a) Berechnen Sie den inversen Tensor der effektiven Masse $((m_{ij}^*))^{-1}$ ((2×2)-Tensor, alle Komponenten können $\neq 0$ sein). (**)

   (b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen Beschleunigung und angelegtem E-Feld für $\underline{k} = (k_0, k_0)$. (*)

   (c) Berechnen Sie den Fermi-Wellenvektor k_F. (*)

(d) Berechnen Sie die zweidimensionale Leitfähigkeit σ für eine von $\underline{k}$ unabhängige Streuzeit $\tau = 300\,\text{ps}$ entsprechend der Formel (Symbole wie im Skript, $T = 0$ K): (***)

$$\sigma = \frac{e^2}{4\pi^3\hbar} \cdot \int \frac{v^2_{x,\mathrm{G}(k_\mathrm{F})}}{|v_{\mathrm{G},\perp}|} \cdot \tau \;\, dk_\mathrm{F} \tag{3}$$

3. *Bandverbiegung* (8 Punkte)

Ein p-dotierter InSb-Einkristall (Bandlücke $E_\mathrm{G} = 0{,}235\,\text{eV}$, Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 16{,}8$, Akzeptordichte $N_A = 1{,}1 \cdot 10^{21}\,\text{m}^{-3}$) wird im Vakuum an der Oberfläche mit Cs-Atomen bedampft, die je ein Elektron abgeben und somit wie eine positiv geladene Elektrode wirken. Bei einer Konzentration von Cs-Atomen $N_\mathrm{Cs} = 6{,}9 \cdot 10^{14}\,\text{m}^{-2}$ liegt an der Oberfläche die Fermi-Energie an der Leitungsbandkante ($E_\mathrm{F} = E_\mathrm{LB}$, $T = 0\,\text{K}$).

(a) Berechnen Sie die Ausdehnung der Bandverbiegung von der Oberfläche ins Volumen hinein, unter der Annahme, dass das Ferminiveau weit entfernt von der Oberfläche genau an der Valenzbandkante liegt. (*)

(b) Wie groß müsste die Dotierung sein, wenn an der Oberfläche ein elektrisches Feld von $5 \cdot 10^7\,\text{V/m}$ herrschen soll? (*)

(c) Wird das elektrische Feld an der Oberfläche größer oder kleiner, wenn man die Cs-Konzentration verdoppelt? Begründen Sie ihre Wahl durch logische Schlußfolgerungen. (**)

Konstanten:
Plancksches Wirkungsquantum: $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$ Js
Boltzmann-Konstante: $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K
Elementarladung: $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronenmasse: $m_\mathrm{Elektron} = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Vakuum-Dielektrizitätskonstante: $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm
1 nm $=10^{-9}$ m, 1 Å$= 10^{-10}$ m, 1 eV $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J

Bestanden haben Sie mit 50 % der Punkte!
(Gesamtpunktzahl: 48)