Lösungsvorschlag Physik. Kond Mat 21.07.2011

Verständnis :

1.) Variablen 3-Elektronen-Zustand : (Summe 10)

$\underline{x_1}$: 3 Ortsvariablen von Elektron 1

$\underline{x_2}$: " " " 2

$\underline{x_3}$: " " " 3

t : Zeit

2.) $E_F(T)$ in 3D :

E_F nimmt mit T ab, da Zustandsdichte mit E zunimmt.
(Für $E_F = const$ würden mehr Zustände oberhalb E_F bevölkert als unterhalb E_F entvölkert $\Rightarrow N \neq const$)

3.) $c_{V,Phonon} > c_{V,Elektron}$?

- nur die Elektronen im Bereich kT um E_F ändern ihre Energie, während Phononen bei 300K weitgehend aufgetaut sind

4.) Fermi-Druck :

Der Fermi Druck ergibt sich dadurch, daß die kin. Energie d. Elektronen mit dem Volumen abnimmt. ($E_{kin} \propto \frac{d^2\psi}{dx^2}$)
(Abstand zwischen Knoten wird größer , $p = \frac{d\psi}{dx}$)

5.) Blochwelle : $\psi_{n\underline{k}}(x) = \underbrace{u_{n\underline{k}}(x)}_{\text{gitterperiodisch}} \cdot \underbrace{e^{i\underline{k}x}}_{\text{ebene Welle}}$

6.) Abstand Zustände im k-Raum :

$\Delta k \propto \frac{1}{L}$ oder Abmessung d. Kristalles

7.) Zustandsdichte groß bei Maxima / Minima von $E(\underline{k})$:

E ändert sich wenig mit $\underline{k}$, d.h. viele in $\underline{k}$ äquidistante Zustände sind in einem Intervall ΔE auffindbar

8.) el. Strom im Bändermodell:

a.) $\underline{E}$-Feld bewirkt $\dot{\underline{k}}$, d.h. Verschiebung d. Besetzung d. Zustände in Richtung $-\underline{E}$

b.) Relaxation τ wirkt der Verschiebung entgegen

$\Rightarrow$ Gleichgewicht (dynamisch) = Verschiebung d. Fermifläche (für $\tau(\underline{k})$ + Verzerrung)

$\Rightarrow$ mehr Elektronen mit Richtung $\underline{k} \parallel -\underline{E}$ $\Rightarrow$ Strom

9.) 2 Parameter E_{Bind} von Donator: Dielektrizitätskonstante ε, effektive Masse m^*

10.) Warum Metalle nicht durch Gate steuerbar?

Abschirmlänge für el. Felder $< 1 Å$ $\Rightarrow$ keine Bandverschiebung möglich

11.) WW für Ferromagnetismus:

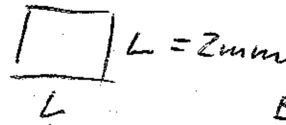
Austauschwechselwirkung (oder Coulomb-Wechselwirkung)

12.) Eigenschaften Supraleiter:

a.) $\rho = 0 \, \Omega m$ verschwindender Widerstand

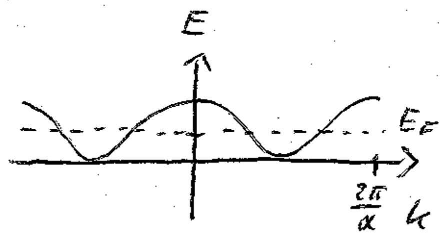
b.) $\chi = -1$ (perfekter Diamagnet)

1. 2DEG



$$E(k) = E_0\,(1+\cos \alpha k) \quad \text{für } \alpha k < 2\pi$$

$$= 2E_0 \quad \text{für } \alpha k \geq 2\pi$$



$\alpha = 5\cdot 10^{-10}\,m \qquad E_F = E_0 = 2eV \quad (T=0)$

a) Fermi-Wellenvektoren $k_F \Rightarrow E(k) = E_F = E_0$

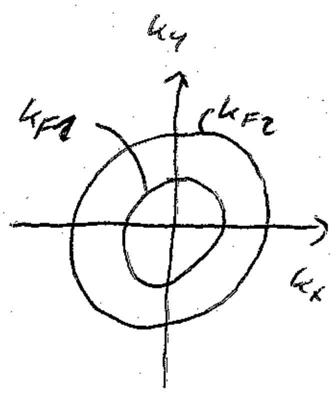
$E(k) = E_0 \Leftrightarrow \quad \cos \alpha k = 0$

$\Leftrightarrow \quad \alpha k = \frac{\pi}{2} \qquad$ oder $\qquad \alpha k = 3\frac{\pi}{2}$

$k_{F1} = \frac{\pi}{2\alpha} \qquad\qquad k_{F2} = \frac{3\pi}{2\alpha}$

$= \underline{\underline{3{,}142\cdot 10^{9}\,m^{-1}}} \qquad\qquad = \underline{\underline{9{,}425\cdot 10^{9}\,m^{-1}}}$

b) Flächen-Ladungsträgerdichte



für $T=0$: alle Zustände mit $E \leq E_F$ besetzt

$\hat{=}$ Ring im $\underline{k}$-Raum mit $k_{F1} \leq k \leq k_{F2}$

Fläche im k-Raum: $A_k = \pi\,(k_{F2}^2 - k_{F1}^2)$

$$= \pi \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 (3^2 - 1^2)$$

$$= \frac{\pi^3}{4\alpha^2}\cdot 8 = \frac{2\pi^3}{\alpha^2}$$

Fläche für einen k-Zustand: $A_1 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$

Anzahl Zustände: $N = \frac{A_k}{A_1}\cdot \underbrace{2}_{\text{Spin}} = \frac{2\pi^3}{\alpha^2}\cdot\frac{L^2}{4\pi^2}\cdot 2 = \frac{\pi L^2}{\alpha^2}$

Ladungsträgerdichte $n = \frac{N}{L^2} = \frac{\pi}{\alpha^2} = \underline{\underline{1{,}257 \cdot 10^{19}\, m^{-2}}}$

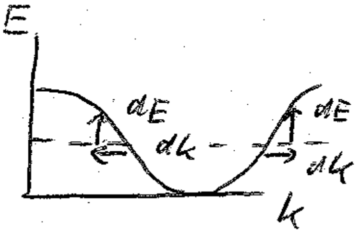
1c) Zustandsdichte bei E_F

$$E = E_0 (1 + \cos \alpha k) \Leftrightarrow \frac{E}{E_0} - 1 = \cos \alpha k$$

$$k = \frac{1}{\alpha} \arccos \frac{E - E_0}{E_0}$$

$$\frac{dk}{dE} = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E - E_0}{E_0}\right)^2}} \cdot \frac{1}{E_0} \qquad \Big| \text{mit } \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\left.\frac{dk}{dE}\right|_{E = E_0} = -\frac{1}{\alpha E_0}$$



$$dN = 2\pi k \, dk \cdot \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2} \cdot 2 = \frac{L^2}{\pi} k \left|\frac{dk}{dE}\right| dE$$

$$E = E_0 \Rightarrow \quad dN = \frac{L^2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \arccos(0) \cdot \frac{1}{\alpha E_0} dE$$

für k_{F1} und k_{F2}

$$\Rightarrow dN = \frac{L^2}{\pi \alpha^2 E_0} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi\right) dE = \frac{L^2}{\pi \alpha^2 E_0} \cdot 2\pi \, dE = \frac{2L^2}{\alpha^2 E_0} dE$$

$$\Rightarrow Z(E_F) = \frac{dN}{dE} = \frac{2L^2}{\alpha^2 E_0} = \underline{\underline{9{,}98 \cdot 10^{31}\, J^{-1}}}$$

d) elektron. Wärmekapazität $(T = 300\, mK)$

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T \cdot Z(E_F) = \underline{\underline{1{,}88 \cdot 10^{-14}\, J/K}}$$

2. Effektive Masse

$$E(k) = \alpha k^4 \quad , \quad \alpha = 1{,}42 \cdot 10^{-52} J \cdot m^4 \quad ,$$

a) $$E(k) = \alpha\,(k_x^2 + k_y^2)^2 = \alpha\left(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4\right)$$

$$(m_{ij}^*)^{-1} = \frac{1}{\hbar^2}\,\frac{d^2 E}{dk_i\, dk_j}$$

$$\frac{dE}{dk_x} = \alpha\left(4k_x^3 + 4k_x k_y^2\right) \qquad \frac{dE}{dk_y} = \alpha\left(4k_x^2 k_y + 4k_y^3\right)$$

$$\frac{d^2E}{dk_x\, dk_y} = \alpha \cdot 8 k_x k_y$$

$$\frac{d^2E}{dk_x^2} = \alpha\left(12k_x^2 + 4k_y^2\right) \qquad \frac{d^2E}{dk_y^2} = \alpha\left(4k_x^2 + 12k_y^2\right)$$

$$(m_{ij}^*)^{-1} = \frac{4\alpha}{\hbar^2}\begin{pmatrix} 3k_x^2 + k_y^2 & 2k_x k_y \\ 2k_x k_y & k_x^2 + 3k_y^2 \end{pmatrix}$$

b) $$\underline{F} = e\underline{E} = \underline{\underline{m}}^* \cdot \underline{a}_G \iff \underline{a}_G = e \cdot (m_{ij}^*)^{-1}\,\underline{E}$$

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{a}_G \sim \begin{pmatrix} 3k_x^2 + k_y^2 \\ 2k_x k_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{a}_G \parallel \underline{E} \text{ für } \underline{k_x = 0 \text{ oder } k_y = 0}}$$

2b) $\underline{k} = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{a}_G \sim \begin{pmatrix} 3k_x^2 + k_y^2 \\ 2k_x k_y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{E} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\sphericalangle(\underline{a}_G, \underline{E}) = \varphi \qquad \cos\varphi \; \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 26{,}57°}}$$

2c) Fermi-Wellenvektor

Abstand der Zustände im k-Raum : $\dfrac{2\pi}{L}$ L: Probengröße

Volumen eines Zustands im k-Raum : $\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^2$

Anzahl der Zustände mit $k \leq k_F$:

$$N = \frac{\pi k_F^2}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} \cdot \underset{\text{Spin}}{2} = \frac{k_F^2}{2\pi} L^2$$

Ladungsträgerdichte $n = \dfrac{N}{L^2} = \dfrac{k_F^2}{2\pi}$

$$\Rightarrow k_F = (2\pi n)^{1/2} = \underline{\underline{2{,}51 \cdot 10^8 \, m^{-1}}}$$

2d) Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{e^2}{4\pi^3 \hbar} \int \frac{v_{x,G}^2(k_F)}{|v_{G,\perp}(k_F)|} \tau \, dk_F = \frac{e^2 \tau}{4\pi^3 \hbar} \int_0^{2\pi} \frac{v_{x,G}^2(k_F)}{|v_{G,\perp}(k_F)|} k_F \, d\varphi$$

dazu: $v_{G,x} = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk_x} = \frac{\alpha}{\hbar}(4k_x^3 + 4k_x k_y^2) = \frac{4\alpha k_F^2}{\hbar} k_x = \frac{4\alpha k_F^3}{\hbar} \cos\varphi$

$$|v_{G\perp}| = \frac{4\alpha}{\hbar} k_F^3$$

$$\rightarrow \frac{v_{x,G}^2}{v_{G,\perp}} = \frac{4\alpha k_F^3}{\hbar} \cdot \cos\varphi$$

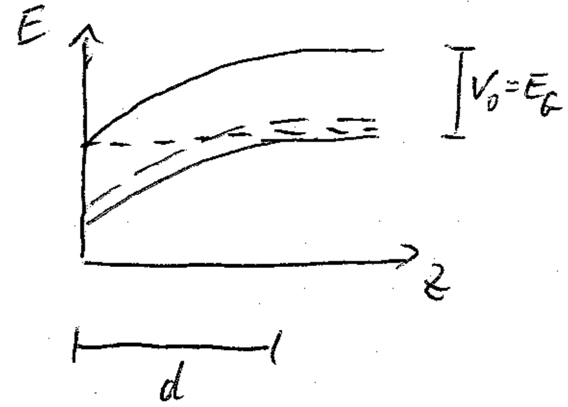
$$\Rightarrow \sigma = \frac{e^2 \tau}{4\pi^3 \hbar} \cdot \frac{4\alpha k_F^4}{\hbar} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi}_{\pi} = \frac{\alpha e^2 \tau}{\pi^2 \hbar^2} k_F^4$$

$\underline{k_F}$: $N = \frac{\pi k_F^2 \cdot 2}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} = \frac{k_F^2}{2\pi} L^2 \Rightarrow k_F = (2\pi n)^{1/2}$

$$\sigma = \frac{\alpha e^2 \tau}{\pi^2 \hbar^2} 4\pi^2 n^2 = \frac{4\alpha e^2 \tau n^2}{\hbar^2} = 39{,}3 \ \Omega^{-1}$$

Bandverbiegung

a) InSb, $p = 1{,}1 \cdot 10^{21}\,m^{-3}$, $E_G = 235\,meV$, $\varepsilon = 16{,}8$



$$d = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 V_0}{e N_A}} = \underline{\underline{630\,nm}}$$

$N_A \uparrow p$

b) $$V(x) = \frac{e N_A}{2\varepsilon\varepsilon_0}(x-d)^2$$

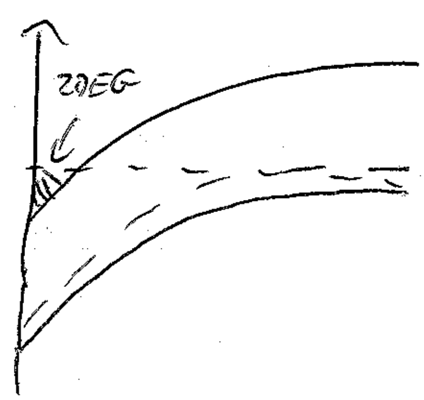
$$|\underline{E}| = \frac{dV}{dx} = \frac{e N_A}{\varepsilon\varepsilon_0}(x-d) = \frac{e N_A}{\varepsilon\varepsilon_0} d \quad \text{für } x=0$$

$$\Rightarrow N_A = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E}{e \cdot d} = \underline{\underline{7{,}369 \cdot 10^{22}\,m^{-3}}}$$

c) N_{Cs} verdoppeln

- weitere Absenkung der Bänder $\Rightarrow V_0$ größer
- Vergrößerung der Raumladungszone $\Rightarrow d$ größer

[- Bildung eines 2DEG an der Oberfläche]



$\Rightarrow \underline{E}$-Feld wird größer