Lösungsvorschlag

Klausur FKP Bachelor
29.07.2010

Verständnis:

1.) B-O-Näherung:

$$\Psi(\underbrace{\underline{x}_1 \dots \underline{x}_N}_{\text{Atomkerne}}, \underbrace{x_{N+1} \dots x_{N+N_m}}_{\text{Elektronen}}) = \tilde{\Psi}(\underline{x}_1, \dots \underline{x}_N) \cdot \hat{\Psi}(x_{N+1} \dots x_{N+N_m})$$

und Separation von $H = H_{el} + H_{Kern}$

Annahme: Potenzial der Kerne ist statisch für die Elektronen

Grund: $M_{Kern} \gg 2000 \cdot m_{el}$ (Kerne sind viel langsamer)

2.) $\Psi(x)$ für Kristalle:

Blochwelle

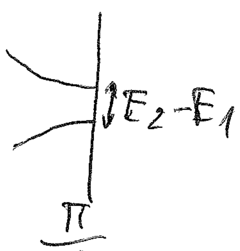
$$\Psi(\underline{x}) = \underbrace{u_{nk}(\underline{x})}_{\text{atomar periodische Funktion}} \cdot e^{i\underline{k}\underline{x}}$$

4.) Bandlücken am BZR:

$\underline{k} = \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda = 2a \quad \Rightarrow |\Psi|^2$ ist periodisch mit a ← Gitterkonst.

2 Lösungen: $e^{ikx} + e^{-ikx}$ $\quad e^{ikx} - e^{-ikx}$ $\Rightarrow \cos kx$ ① $\quad \sin kx$ ②

Maxima über Atomen $\qquad$ Maxima zw. Atomen



$\Rightarrow E_1 < E_2$

3.) Berechnung C_v:

$$C_v = \frac{dU}{dT} = \int_0^\infty Z(E) \frac{\partial f(E,T)}{\partial T} \cdot E \, dE$$

5.) formale Definition E_F: $N, z(E)$ gegeben

$$N = \int_0^\infty z(E) \cdot \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}}+1} \, dE$$

E_F ist die einzige Unbekannte

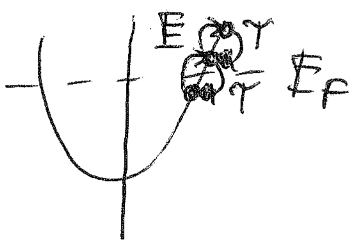
6.) Bestimmung Bandstruktur:

winkelaufgelöste Photoelektronenspektroskopie

7.) Stromtransport = Verschiebung Fermifläche

1.) $\underline{E} \propto \underline{k}$

2.) Relaxation begrenzt Zuwachs an $\underline{k}$ (Streuzeit τ)



$\Rightarrow$ mittleres $\Delta \underline{k}$ (Vektor)

= Verschiebungsvektor Fermifläche

8.) 3 Streuprozesse:

Elektron – Defekt, Elektron – Phonon, Elektron – Elektron $m_1^* \neq m_2^*$

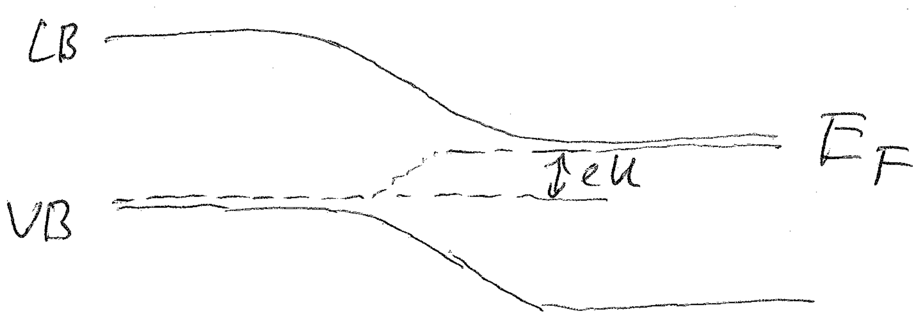
9.) Donatorniveau = H-Atom:

Zusatzelektron Donator $\rightarrow$ Leitungsband

$\Rightarrow$ freies Elektron mit m^* um Kern (ionisierter Donator)

In Umgebung ε $\Rightarrow$ $E_D - E_{LB} = 13.6\,eV \cdot \frac{m^*}{\varepsilon^2}$

10.) Bandschema p-n-Diode: + an p – an n $U < E_{gap}$



11.) Wechselwirkung für ↑↑ in Ferromagnet:

Austausch wechselwirkung $\vee$ $\langle \psi_1(\underline{x}_1)\psi_2(\underline{x}_2) | \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|} | \psi_2(\underline{x}_1) \psi_1(\underline{x}_2) \rangle_{\underline{x}_1, \underline{x}_2}$

12.) 3 Energien für Domänenbildung

a.) Austauschenergie b.) Anisotropieenergie = Spin-Bahn-Energie

c.) Streufeldenergie

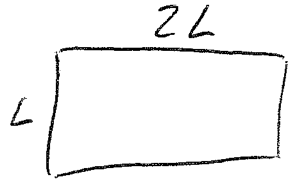
1) 2DEG

Aufgaben

$E(k) = \alpha^2 k^4$ $\alpha^2 = 1{,}44 \cdot 10^{-54}\ J \cdot m^4$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{\alpha}\sqrt{E}$ $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-27}\ \sqrt{J} \cdot m^2$

$L = 100\,nm$



$k_x = \frac{2\pi}{4L} m = \frac{\pi}{2L} \cdot m$

$k_y = \frac{2\pi}{2L} n = \frac{\pi}{L} n$

$\underline{x}: \ 2L = m \cdot \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4L}{m}$

$\underline{y}: \ L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$

a)

$$E = \alpha^2 (k_x^2 + k_y^2)^2 = \alpha^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \left(\frac{m^2}{4} + n^2\right)^2$$

m	n	$\frac{m^2}{4} + n^2$
1	1	1,25
2	1	2
1	2	4,25
3	1	3,25

$\alpha^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 = 1{,}4 \cdot 10^{-24} J = 8{,}76\,\mu eV$

$E_{1,1} = 13{,}7\,\mu eV$

$E_{21} = 35\,\mu eV$

$E_{31} = 92{,}5\,\mu eV$

b) $A_k = \Delta k_x \cdot \Delta k_y = \frac{\pi}{2L} \cdot \frac{\pi}{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} = 4{,}9 \cdot 10^{14}/m^2$

c) Zustände bis k: $\frac{\pi k^2}{4 A_k} \cdot \overset{\text{spin}}{2} = \frac{2\pi k^2 \cdot 2L^2}{4\pi^2} = \frac{4L^2}{4\pi} k^2 = N$

$N(E) = \frac{4L^2}{4\pi} \frac{1}{\alpha} \sqrt{E} \quad \Rightarrow$

$$Z = \frac{dN}{dE} = \frac{4L^2}{4\pi\alpha} \frac{1}{2} E^{-\frac{1}{2}} = \frac{2L^2}{4\pi\alpha} \frac{1}{\sqrt{E}} = \underline{\underline{\frac{L^2}{2\pi\alpha} \cdot E^{-1/2}}}$$

ybnn(

1) Hall-Messung: $I = 1\,mA$, $B = 2\,T$, $U_H = 25\,mV$

$$U_H = \frac{I \cdot B}{n_{3D}\, e d} \Leftrightarrow n_{3D} \cdot d = n_{2D} = \frac{I \cdot B}{e \cdot U_H} = 5 \cdot 10^{17}\, m^{-2}$$

e) $N = n_{2D} \cdot L \cdot 2L = 10\,000 = N(E_F)$

$$N(E) = \frac{4L^2}{4\pi\alpha} \sqrt{E} \Leftrightarrow E = \left(\frac{\pi\alpha N \cdot 4}{4L^2}\right)^2 = 88{,}64\ eV$$

f) elektron. Wärmekapazität:

$$c_V \approx \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T \cdot Z_{elektron}(E_F)$$

$$Z(E_F) = \frac{2L^2}{4\pi\alpha} \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{2L^2}{4\pi\alpha} \cdot \frac{4L^2}{4\pi\alpha N} = \frac{8L^4}{16\pi^2\alpha^2 N} = 3{,}5 \cdot 10^{20}/J$$

$$\Rightarrow c_V = 8{,}8 \cdot 10^{-25}\ J/K$$

2) Halbleiter

GaAs $E_G = 1{,}4\,eV$ $m^* = 0{,}065\,m_0$ $\varepsilon = 13$ $\mu = 5000\,cm^2/Vs$

a) $E_n = \frac{m^* e^4}{2(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \hbar)^2 n^2} = 5{,}23\,meV$
$= 8{,}38 \cdot 10^{22}\,J \mathrel{\hat{=}} 60{,}7\,K$

b) $R = \rho \cdot \frac{L}{A}$ $\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{L}{R \cdot A} = 74{,}1\,\frac{S}{m}$

$\sigma = ne\mu \Rightarrow n = \frac{\sigma}{e\mu} = 9{,}25 \cdot 10^{20}\,m^{-3}$

c) $\tau = \frac{m^* \mu}{e} = 1{,}85 \cdot 10^{-13}\,s$

d) $R(4K) = 28\,M\Omega \gg R(300\,K) \Rightarrow$ Ladungsträger ausgefroren
$\Rightarrow$ nicht entartet

oder: $a_B = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{h^2}{\pi m^* e^2} = 10{,}6\,nm$

$n_c = \left(\frac{0{,}27}{a_B}\right)^3 = 1{,}6 \cdot 10^{22}\,m^{-3} \gg n \Rightarrow$ nicht entartet

3.) Leitfähigkeit:

GaAs $E_G = 0{,}4\,eV$ $N_D = 5\cdot10^{21}\,1/m^3$ $\frac{m^*}{m_E} = 0{,}023$ $\varepsilon = 15$

$\rho(4K) = 10^{-5}\,\Omega m$ $\rho(300K) = 10^{-3}\,\Omega m$

a.) Entartung?

$$a_B = \frac{\varepsilon}{m^*}\cdot 0{,}5\,Å = 32{,}6\,nm \Rightarrow n_C = \frac{0{,}02}{a_B^3} = 5{,}7\cdot10^{20}/m^3$$

$\Rightarrow$ entartet

b.) Streuzeit τ_{Defekt}

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{e^2}{4\pi^3\hbar}\iint_{E_F} \frac{\underbrace{v_{x,G}(k_F)^2}{\underbrace{v_{G,\perp}(k_F)}_{\text{isotrop}}}\underbrace{\tau(k_F)}_{\text{isotrop}}\,d^2k_F$$

$$= \frac{e^2}{4\pi^3\hbar}\cdot\frac{v_{\cancel{G}}}{3}(k_F)\cdot\tau(k_F)\cdot\underbrace{\iint_{\cancel{E=E_F}} d^2k_F}_{4\pi k_F^2}$$

$$\boxed{NR:\ v_G = \frac{d\omega}{\partial k} = \frac{\partial\,\hbar k^2}{\partial k}\cdot\frac{1}{2m^*} = \frac{\hbar k_F}{m^*}}$$

$$\Rightarrow \cancel{\sigma}\ \frac{1}{\rho} = \frac{e^2}{\pi^2}\frac{k_F^3}{3m^*}\cdot\tau(k_F) \Rightarrow \tau_{[illegible]} = \frac{3\pi^2\cdot m^*}{e^2 k_F^3\cdot\rho}$$

Berechnung k_F: $Z_{Elektron} = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E} \Rightarrow$

$$N_D = \frac{1}{3\pi^2}\cdot\left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2} E_F^{3/2} \qquad E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

$$= \frac{1}{3\pi^2}\cdot\left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{3/2}\cdot k_F^3 = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \Rightarrow k_F^3 = 3\pi^2 N_D$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{3\pi^2\,m^*}{e^2\rho\cdot3\pi^2 N_D} = 1{,}6\cdot10^{-11}\,s = \tau_{Defekt}(4K)$$

c.)

<u>300K</u>: $\tau_{Phonon} = ?$ $\tau_{Ges} = 1{,}6\cdot10^{-13}\,s$

$$\frac{1}{\tau_{Phonon}} + \frac{1}{\tau_{Defekt}} = \frac{1}{\tau_{Ges}} \Rightarrow \tau_{Phonon} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_{Ges}} - \frac{1}{\tau_{Defekt}}} \approx \tau_{Ges} = 1{,}6\cdot10^{-13}\,s$$

d.) Fehler durch $\frac{df}{dT} = -\delta(E-E_F)$?

$$\sigma_x \underset{-}{\propto} \iiint v_{x,G}^2 \frac{df_0}{\partial E} \cdot \tau \, d^3k \propto \int_0^\infty \left(\iint_{A_k} \frac{v_{x,G}^2}{|v_G|} \cdot \tau(k) \, d^2k \right) \cdot \frac{df}{dE} \, dE$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{parabolisch} \\ \text{isotrop}}}{\propto} \int_0^\infty \left(k \cdot \iint_{A_k} d^2k \right) \overset{\swarrow \text{isotrop}}{\tau(k)} \frac{df}{\partial E} \, dE \propto \int_0^\infty k^3 \tau \frac{df_0}{\partial E} \, dE$$

$$\propto -\int_0^\infty E^{3/2} \cdot \frac{e^{-(E-E_F)/kT}}{(e^{+E-E_F/kT}+1)^2} \, dE \cdot \frac{1}{kT} \cdot \tau$$

$$x = \frac{E-E_F}{kT} \Rightarrow \frac{dx}{\partial E} = \frac{1}{kT}$$

$$= + \int_0^\infty (kTx + E_F)^{3/2} \cdot \frac{e^{-x}}{(e^x+1)^2} \, dx \cdot \tau$$

$$E^{3/2} = (kTx + E_F)^{3/2}$$

$$(kTx + E_F)^{3/2} > E_F^{3/2} \text{ f.a. } x \in (0,\infty)$$

$$\frac{e^{-x}}{(e^x+1)^2} > 0 \quad \text{f.a. } x \in (0,\infty)$$

$$\Rightarrow \sigma_x(T > 0K) > \underset{\text{für } \tau = \text{const}}{\sigma_x(T = 0K)} \Rightarrow \tau_{\text{korrekt}} < \tau_{\text{Rechnung}}$$

<u>τ wird überschätzt</u>